UNA VERSIÓN RELAJADA DEL TEOREMA DE LEVANTAMIENTO DEL CONMUTANTE EN EL MARCO DE LOS ESPACIOS DE KREĬN

S.A.M. MARCANTOGNINI, M.D. MORÁN

Resumen

Un desarrollo reciente en la teoría de levantamiento es la versión "relajada" del Teorema de Levantamiento del Conmutante debida a C. Foias, A.E. Frazho y M.A. Kaashoek [5]. El del Levantamiento del Conmutante Relajado puede interpretarse como un teorema de existencia de soluciones de un problema abstracto de interpolación. El conjunto de datos del problema es $\{C, T, V_T, R, Q\}$ y consta de cinco operadores que actúan en espacios de Hilbert: una contracción $C : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$, una contracción $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con dilatación isométrica minimal $V_T : \mathcal{K}_T \to \mathcal{K}_T$ (de modo que $\mathcal{K}_T$ es el menor espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ y a las órbitas $V_T^n \mathcal{H}$ para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$, al tiempo que V_T es una isometría en $\mathcal{K}_T$ tal que $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}_T} V_T^n|_{\mathcal{H}} = T^n$ para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$, donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}_T}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{K}_T$ sobre $\mathcal{H}$) y dos operadores lineales y acotados $R, Q : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}$. Los operadores dados satisfacen las relaciones

$$TCR = CQ \quad \text{y} \quad R^*R \leq Q^*Q.$$

El problema de levantamiento consiste en hallar una contracción $D : \mathcal{E} \to \mathcal{K}_T$ tal que

$$P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}_T} D = C \quad \text{y} \quad V_T D R = DQ.$$

Los interpolantes de $\{C, T, V_T, R, Q\}$ son todos las contracciones D que satisfacen las restricciones métricas impuestas.

El célebre Teorema de Levantamiento del Conmutante [10] aparece en el contexto de la versión relajada cuando $R = 1$ (la identidad en $\mathcal{E}$, de manera que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$) y Q es una isometría en $\mathcal{E}$. Es así que $R^*R = 1 = Q^*Q$ en este caso. Así mismo, la generalización del Teorema de Levantamiento del Conmutante de S. Treil y A. Volberg [11], la versión "ponderada" debida a A. Biswas, C. Foias y A. E. Frazho [2] y un amplio abanico de problemas diversos de extensión, levantamiento e interpolación están incluídos en el esquema relajado.

Una vez establecida la existencia de interpolantes, el problema de describirlos y catalogarlos aparece de manera natural y, bajo la óptica de las aplicaciones a situaciones concretas, cobra especial relevancia. Descripciones de los interpolantes en el Teorema de Levantamiento del Conmutante Relajado han sido presentadas por A.E. Frazho, S. ter Host y M.A. Kaashoek en [6] y [7], por W.S. Li y D. Timotin en [8], y en [9].

Extensiones del Teorema de Levantamiento del Conmutante al ámbito de los espacios de Kreĭn fueron obtenidas en varios casos particulares por diversos autores y con toda generalidad por M.A. Dritschel (Ph.D Dissertation, University of Virginia, 1989). En [4] el enfoque adoptado en [3] combinado con una revisión exhaustiva del modelo de Arov-Grossman en el marco de los espacios de Kreĭn permitió obtener el catálogo de todos los interpolantes en el Teorema de Levantamiento del Conmutante para operadores contractivos en espacios de Kreĭn. Es así que el resultado de Dritschel (existencia) y los resultados reportados en [3] (catálogo) se constituyen en los primeros desarrollos de la teoría de levantamiento en espacios de Kreĭn en el marco del Teorema de Levantamiento del Conmutante, en paralelo con la que ha sido su progresión en el contexto de los espacios de Hilbert.

Cuando, de considerar espacios de Hilbert, pasamos a considerar espacios de Kreĭn, debemos tomar en cuenta que hay diferencias significativas entre los operadores contractivos en espacios de Hilbert y sus iguales en espacios de Kreĭn. Por ejemplo, un operador contractivo T de un espacio de Kreĭn $\mathcal{H}$ en un espacio de Kreĭn $\mathcal{K}$ puede no ser continuo y su adjunto T^* puede no resultar en una contracción. Cuando ambos T y T^* son contractivos, decimos que T es una bicontracción. Bien podemos decir que, para los espacios de Kreĭn, la noción que corresponde a la de operador contractivo en espacios de Hilbert es la de bicontracción continua. Bajo esta interpretación no luce sorprendente que las primeras versiones del Teorema de Levantamiento del Conmutante en espacios de Kreĭn consideraran bicontracciones continuas. Nos proponemos recorrer el mismo curso y extender el Teorema de Levantamiento del Conmutante Relajado a espacios de Kreĭn en el caso que el operador T es una bicontracción continua.

Presentamos una tal extensión y una descripción paramétrica de los interpolantes correspondientes. Usamos el método de acoplamiento para obtener, a partir del conjunto $\{C, T, V_T, R, Q\}$ de cinco operadores en espacios de Kreĭn, con T bicontracción continua, una bicontracción continua X (el operador acoplado) en un espacio de Kreĭn (el espacio acoplado) y mostramos que los interpolantes de $\{C, T, V_T, R, Q\}$ pueden obtenerse a partir de las débil-dilataciones unitarias minimales por espacio de Hilbert agregado de X. Construímos una versión en espacios de Kreĭn del modelo de Arov y Grosssman [1] y la usamos para obtener, dada cualquier bicontracción continua en un espacio de Kreĭn, un catálogo de sus débil-dilataciones unitarias minimales por espacio de Hilbert agregado, para luego presentar una descripción paramétrica de los interpolantes en el caso bajo estudio. Resulta que la descripción paramétrica de los interpolantes está dada por un mapa sobre cierto conjunto de funciones de Schur (los parámetros) y establece una correspondencia uno-a-uno entre los parámetros y los interpolantes en el caso particular del Teorema de Levantamiento del Conmutante para bicontracciones en espacios de Kreĭn.

Referencias

[1] D.Z. Arov, L.Z. Grossman, *Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators*, Math. Nachr., **157**(1992), 105–123.

[2] A. Biswas, C. Foias, A.E. Frazho, *Weighted commutant lifting*, Acta Sci. Math (Szeged) **65**(1999), 657–686.

[3] A. Dijksma, M.A. Dritschel, S.A.M. Marcantognini, H.S.V. de Snoo, *The commutant lifting theorem for contractions on Kreĭn spaces*, Operator Theory: Adv. Appl., Vol. **61**, Birkhäuser, Basel, 1993, 65–83.

[4] A. Dijksma, S.A.M. Marcantognini, H.S.V. de Snoo, *A Schur type analysis of the minimal unitary Hilbert space extensions of a Kreĭn space isometry whose defect subspaces are Hilbert spaces*, Z. Anal. Anwendungen **13**(1994), No. 2, 233–260.

[5] C. Foias, A.E. Frazho, M.A. Kaashoek, *Relaxation of metric constrained interpolation and a new lifting theorem*, Integral Equations Operator Theory, **42**(2002), 253–310.

[6] A.E. Frazho, S. ter Horst, M.A. Kaashoek, *Coupling and relaxed commutant lifting*, Integral Equations Operator Theory, **54**(2006), 33–67.

[7] A.E. Frazho, S. ter Horst, M.A. Kaashoek, *All solutions to the relaxed commutant lifting problem*, Acta Sci. Math. (Szeged), **72**(2006), No. 1-2, 299–318.

[8] W.S. Li, D. Timotin, *The relaxed intertwining lifting in the coupling approach*, Integral Equations Operator Theory, **54**(2006), 97–111.

[9] S.A.M. Marcantognini, M.D. Morán, *A Schur analysis of the minimal weak unitary dilations of a contraction operator and the Relaxed Commutant Lifting Theorem*, Integral Equations Operator Theory, **64**(2009), 273–299.

[10] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970.

[11] S. Treil, A. Volberg, *A fixed point approach to Nehari's problem and its applications*, en *Toeplitz Operators and Related Topics (Santa Cruz, CA, 1992), The Harold Widom Anniversary Volume*, Operator Theory: Adv. Appl., Vol. **71**, Birkhäuser, Basel, 1994, 285–296.

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas & Universidad Simón Bolívar

E-mail address: smarcant@ivic.ve

Universidad Central de Venezuela
E-mail address: lolomoran@gmail.com